SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1993-94

Giovanni Bellettini

SU UN MODELLO DI MUMFORD E NITZBERG PER LA SEGMENTAZIONE DI IMMAGINI

28 aprile 1994

Tecnoprint - Bologna 1994

ON A MODEL BY MUMFORD AND NITZBERG FOR IMAGE SEGMENTATION

G. BELLETTINI(†) AND M. PAOLINI(*)

Abstract. We study a model of image segmentation recently suggested by Mumford and Nitzberg which involves the length and the curvature of the contours . The model is described by an energy functional defined on ordered families of subsets of $\mathbf{R}^2$. More precisely, let $g \in L^\infty(\mathbf{R}^2)$ be a given function with compact support, representing the grey-level of the image. The aim is to reconstruct g by a minimum point of the functional $\mathcal{P}$ defined by

$$\mathcal{P}(E_1,\dots,E_n) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial E_i} [1+\psi(\theta_i,\kappa_i)]\, d\mathcal{H}^1 + \sum_{i=1}^{n} |E_i| + \sum_{i=1}^{n+1} \int_{E_i'} |g_i - g|^2\, dz.$$

Here $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, $E_1,\dots,E_n \subseteq \mathbf{R}^2$ are bounded open sets of class $\mathcal{C}^2$, $\theta_i(z)$ is the angle that the tangent unit vector of ∂E_i at $z \in \partial E_i$ forms with the positive direction of the x-axis, $\kappa_i(z)$ is the curvature of ∂E_i at z, $|E_i|$ is the Lebesgue measure of E_i, $\mathcal{H}^1$ denotes the one-dimensional Hausdorff measure in $\mathbf{R}^2$, and

$$E_1' = E_1, \qquad E_i' = E_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} E_j \quad \forall\, i = 2,\dots,n, \qquad E_{n+1}' = \mathbf{R}^2 \setminus \bigcup_{j=1}^{n} E_j,$$

$$g_i = \frac{1}{|E_i'|}\int_{E_i'} g\, dz \quad \forall\, i=1,\dots,n, \qquad g_{n+1} = 0.$$

Finally $\psi : \mathbf{R}\times\mathbf{R} \to [0,+\infty]$ is a Borel function satisfying suitable convexity and growth conditions. The fact that the functional is defined on partitions of sets and the presence of a (possibly linear) curvature term in the energy functional permit to reconstruct the hidden parts of the image occluded by regions which are closer to the observer. To deal with corners and cusps, which are viewed as points where the curvature is concentrated, we introduce the class of the continuous curves having derivative of class BV, and we study their arguments. The proof is based on the techniques of relaxation theory in the Calculus of Variations. We estimate the lower semicontinuous envelope of the energy functional, and we compute it in some special cases.

AMS(MOS) subject classifications (1985 revision). 49J45, 49Q20

(†)Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, piazza di Porta San Donato 5, 40127 Bologna, Italy. email: bellettini@dm.unibo.it

(*)Dipartimento di Matematica, Università di Milano, via Saldini 50, 20133, Milano. email: paolini@isa.mat.unimi.it

SU UN MODELLO DI MUMFORD E NITZBERG PER LA SEGMENTAZIONE DI IMMAGINI

G. BELLETTINI & M. PAOLINI

1. Introduzione. In questo lavoro illustriamo alcuni risultati ottenuti in [4] relativamente a un modello proposto da Mumford e Nitzberg sul problema della segmentazione di immagini [26,29]. L'approccio è variazionale, e consiste essenzialmente nello studio della semicontinuità di un funzionale dipendente dalla lunghezza e dalla curvatura del bordo di un sottoinsieme regolare limitato di $\mathbf{R}^2$ (si veda la sezione 3). Per tenere conto della profondità relativa degli oggetti, il funzionale che descrive il modello viene definito su famiglie ordinate finite di sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$ di classe $\mathcal{C}^2$ (si veda (3.1)), e poi esteso per inferiore semicontinuità su famiglie formate da insiemi anche non regolari. Il fatto di definire un funzionale su famiglie ordinate di insiemi è una delle due novità dell'approccio di Mumford e Nitzberg: invece di basare il modello su un insieme di curve che dividono un certo dominio in regioni disgiunte [27], si cerca un insieme di porzioni del piano la cui unione sia il dominio, e che possano avere zone di sovrapposizione, porzioni legate tra loro dall'ordinamento dato dalla profondità. Le seconda novità consiste nel fatto che il termine di curvatura ha crescita lineare all'infinito. Ciò distingue in modo essenziale questo modello da quello studiato in [3], in cui viene considerato un funzionale (sempre in dimensione due) con un termine di curvatura a crescita $p > 1$ (si vedano anche i lavori [2,20,21,25]). Il fatto che il termine di curvatura possa essere a crescita lineare porta a considerare famiglie di curve chiuse di classe $W^{1,1}$ (parametrizzate con velocità costante) aventi come derivata una funzione di classe BV (Definizione 2.4). Su tali curve, o più precisamente, sulla classe delle funzioni angolo che il vettore tangente a tali curve forma con la direzione positiva dell'asse delle x (si veda Lemma 2.1), si può definire un funzionale (si veda (3.7)) che sembra essere un buon candidato per lo studio del rilassamento della parte di curvatura del funzionale originale, che invece era definito su insiemi (si veda (3.5)). Definire il funzionale su angoli comporta alcune difficoltà, viste le varie identificazioni modulo 2π di cui bisogna tenere conto (si veda la definizione dello spazio $BV(]a,b[;\mathbf{R}/2\pi)$). D'altra parte, come si vedrà nel seguito, pensare i funzionali dell'energia definiti su angoli sembra essere la cosa più naturale per valutare energie concentrate su punti singolari, come angoli o cuspidi (si veda anche la diseguaglianza 2.2). Questo corrisponde a definire il funzionale su funzioni a valori nella sfera unitaria $\mathbf{S}^1$ [18].

Quello che interessa qui è lo studio delle proprietà di semicontinuità e rilassamento delle energie (si veda (4.1) e sezione 5). In particolare, oltre alla semicontinuità dei funzionali sugli insiemi regolari di classe $\mathcal{C}^2$, ci interessa valutare l'inviluppo semicontinuo (o funzionale rilassato) rispetto alla convergenza in misura di insiemi, in modo da potere dare un significato alla curvatura nei punti singolari. Come vedremo in seguito, tale funzionale tiene conto delle energie concentrate in tali punti, ma anche delle mutue distanze tra essi.

Per quanto riguarda la bibliografia su problemi della segmentazione affrontati con tecniche variazionali, si vedano tra gli altri [1,5,7,11,13,14,17,22,24,27,28,30,31,32].

Infine, per ulteriori dettagli e per le dimostrazioni si rimanda a [4].

2. Alcune notazioni e risultati preliminari. Denotiamo con $\mathcal{H}^h$ la misura di Hausdorff h-dimensionale in $\mathbf{R}^2$, per $h = 0, 1$ [16]; indichiamo con $|B|$ la misura di Lebesgue di un insieme di Borel $B \subseteq \mathbf{R}^2$.
Denotiamo con $\mathcal{C}_b^2(\mathbf{R}^2)$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$ aperti limitati di classe $\mathcal{C}^2$.
Nel seguito indichiamo con I un intervallo aperto e limitato di $\mathbf{R}$.
Con $(\gamma) = \gamma([0,1]) = \{\gamma(t) : t \in [0,1]\}$ denotiamo la traccia di una curva γ e con $l(\gamma)$ la sua lunghezza. Inoltre, se $z \in \mathbf{R}^2 \setminus (\gamma)$, $I(\gamma, z)$ è l'indice di z rispetto a γ [6], [9, III.8].

DEFINIZIONE 2.1. *Un sistema di curve è una famiglia finita $\Gamma = \{\gamma^1, \ldots, \gamma^m\}$ di curve chiuse di classe $W^{1,1}$ tale che per ogni $i = 1, \ldots, m$ la quantità $|\dot{\gamma}^i|$ sia costante quasi ovunque su $[0,1]$. La traccia (Γ) del sistema Γ si definisce come $\bigcup_{i=1}^m (\gamma^i)$, e la lunghezza $l(\Gamma)$ come $\sum_{i=1}^m l(\gamma^i)$. Se $z \in \mathbf{R}^2 \setminus (\Gamma)$, l'indice $I(\Gamma, z)$ di z rispetto a Γ è definito come $\sum_{i=1}^m I(\gamma^i, z)$.*

Il sistema di curve $\Gamma = \{\gamma^1, \ldots, \gamma^m\}$ si dice disgiunto se $(\gamma^i) \cap (\gamma^j) = \emptyset$ per ogni $i, j = 1, \ldots, m$, $i \neq j$.

Sia $E \in \mathcal{C}_b^2(\mathbf{R}^2)$; diciamo che il sistema disgiunto di curve Γ è una parametrizzazione orientata di ∂E se ogni curva del sistema è semplice, $(\Gamma) = \partial E$, e

$$E = \{z \in \mathbf{R}^2 : I(\Gamma, z) = 1\}, \quad \mathbf{R}^2 \setminus \overline{E} = \{z \in \mathbf{R}^2 : I(\Gamma, z) = 0\}.$$

2.1. Gli spazi $BV(I)$ e $BV(]a,b[\,; \mathbf{R}/2\pi)$. Indichiamo con $BV(I)$ lo spazio delle funzioni a variazione limitata su I. Per le principali definizioni e proprietà delle funzioni BV si rimanda a [10,16,19,23,33].

Data $f \in BV(I)$, scriveremo

$$\dot{f} = \dot{f}^a \, dt + \dot{f}^s,$$

dove $\dot{f}^a \in L^1(I)$ è la densità della parte assolutamente continua di $\dot{f}$ rispetto alla misura di Lebesgue, e $\dot{f}^s$ è la parte singolare.

Se $f \in BV(I)$ indichiamo con S_f l'insieme di salto di f, e poniamo $f(t-) = \text{ap} - \liminf_{\tau \to t} f(\tau) \leq f(t+) = \text{ap} - \limsup_{\tau \to t} f(\tau)$.

Identificheremo talvolta $f \in BV(I)$ con il suo rappresentante $\widetilde{f}(t) = (f(t-)+f(t+))/2$ definito ovunque (si veda [16, Th. 4.5.9]).

Dato che intendiamo lavorare su funzioni angolo, introduciamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE 2.2. *Siano $\theta_1, \theta_2 \in BV(]a,b[)$. Diciamo che θ_1 e θ_2 sono equivalenti se per quasi ogni $t \in]a,b[$ esiste $k(t) \in \mathbf{Z}$ tale che $\theta_1(t) = \theta_2(t) + 2k(t)\pi$. Indichiamo con $[\theta]$ la classe di equiavalenza di θ,* e poniamo

$$BV(]a,b[\,;\mathbf{R}/2\pi) = \{[\theta] : \theta \in BV(]a,b[)\}.$$

È facile vedere che dato $[\theta] \in BV(]a,b[\,;\mathbf{R}/2\pi)$ esiste una funzione $\Theta \in [\theta]$, che chiameremo un rappresentante minimale di $[\theta]$, tale che

$$|\dot{\Theta}|(]a,b[) = \min\{|\dot{\underline{\theta}}|(]a,b[) : \underline{\theta} \in [\theta]\}. \tag{2.1}$$

Denotiamo con $\mathcal{M}[\theta]$ l'insieme dei rappresentanti minimali Θ di $[\theta] \in BV(]a,b[\,;\mathbf{R}/2\pi)$ tali che $\Theta(a+) \in [0,2\pi[$.

DEFINIZIONE 2.3. *Sia $[\theta] \in BV(]a,b[\,;\mathbf{R}/2\pi)$, e sia $\{[\theta_h]\}_h \subseteq BV(]a,b[\,;\mathbf{R}/2\pi)$. Diciamo che $[\theta_h] \to [\theta]$ per $h \to +\infty$ se, per ogni $\underline{\theta} \in [\theta]$ e ogni $h \in \mathbf{N}$, esiste $\underline{\theta}_h \in [\theta_h]$ tale che $\underline{\theta}_h \to \underline{\theta}$ in $L^1(]a,b[)$ per $h \to +\infty$.*

2.2. Sistemi di curve con derivata discontinua.

DEFINIZIONE 2.4. *Diciamo che un sistema di curve $\Gamma = \{\gamma^1, \ldots, \gamma^m\}$ è di classe $\mathcal{B}$ se $\gamma^i \in W^{1,1}([0,1];\mathbf{R}^2)$ e $\dot{\gamma}^i \in BV([0,1];\mathbf{R}^2)$ per ogni $i = 1, \ldots, m$.*

Sia γ una curva di classe $\mathcal{B}$; se $B \subseteq [0,1]$ è un sottoinsieme di Borel che contiene uno degli estremi dell'intervallo $[0,1]$, con $|\dot{\gamma}|(B)$ intendiamo $|\dot{\gamma}|(B \cap\,]0,1[) + |\dot{\gamma}|(\{0\})$, dove $|\dot{\gamma}|(\{0\})$ si considera definito per l'estensione periodica di γ.

2.3. Limiti di sistemi di curve regolari.

DEFINIZIONE 2.5. *Diciamo che una successione $\{\Gamma_h\}_h$ di sistemi di curve di classe $\mathcal{C}^2$ è debolmente convergente a una famiglia di curve $\Gamma = \{\gamma^1, \ldots, \gamma^m\}$ se il numero dell curve di ogni sistema Γ_h è lo stesso del numero di curve di Γ per h sufficientemente grande, i.e., $\Gamma_h = \{\gamma_h^1, \ldots, \gamma_h^m\}$ per ogni h, e, inoltre, $\gamma_h^i \to \gamma^i$ uniformemente, $\dot{\gamma}_h^i \rightharpoonup \dot{\gamma}^i$ debolmente in BV per $h \to +\infty$, per ogni $i = 1, \ldots, m$.*

Osserviamo che se una successione di sistemi di curve $\{\Gamma_h\}_h$ di classe $\mathcal{C}^2$ è debolmente convergente alla famiglia $\Gamma = \{\gamma^1, \ldots, \gamma^m\}$, allora Γ è un sistema di curve di classe $\mathcal{B}$, e $I(\Gamma, z) \in \{0,1\}$ per ogni $z \in \mathbf{R}^2 \setminus (\Gamma)$.

DEFINIZIONE 2.6. *Diciamo che Γ è un sistema limite di curve se Γ è il limite debole di una successione di parametrizzazioni orientate di aperti limitati di classe $\mathcal{C}^2$.*

2.4. Esistenza della funzione argomento per curve con derivata discontinua. Il seguente lemma permette di parlare di argomento di $\dot\gamma$, dove γ è una curva di classe $\mathcal{B}$ parametrizzata con velocità costante.

LEMMA 2.1. *Sia $f \in BV(]a,b[\ ;\mathbf{R}^2)$ tale che $|f(t)| = R$ per quasi ogni $t \in]a,b[$, per un certo $R > 0$. Allora esiste una funzione $\Theta :]a,b[\to \mathbf{R}$ che ha le seguenti proprietà:*

(a) $\Theta \in BV(]a,b[)$ e $f(t) = (R\cos\Theta(t), R\sin\Theta(t))$ per quasi ogni $t \in]a,b[$;

(b) $S_\Theta = S_f$;

(c) $-\pi < \Theta(t+) - \Theta(t-) \leq \pi$ per ogni $t \in]a,b[$.

Quando $f = \dot\gamma$ e $\gamma \in \mathcal{B}$, ci vuole una attenzione ulteriore dovuta al fatto che la curva è chiusa, e dunque parametrizzata su un intervallo con estremi identificati; pertanto bisogna specificare cosa si intende per variazione del relativo argomento su tale intervallo. Se $B \subseteq [a,b]$ è un insieme di Borel che contiene almeno uno degli estremi dell'intervallo di parametrizzazione, con $|\dot\Theta|(B)$ intendiamo $|\dot\Theta|(B\cap\ ]a,b[) + |\Theta(a+) - \Theta(b-) - 2k\pi|$, dove $\Theta(a+) = \text{ap} - \lim_{t\to a^+}\Theta(t) = \lim_{t\to a^+}\widetilde\Theta(t)$, $\Theta(b-) = \text{ap} - \lim_{t\to b^-}\Theta(t) = \lim_{t\to b^-}\widetilde\Theta(t)$, e $k \in \mathbf{Z}$ è tale che $-\pi < \Theta(a+) - \Theta(b-) - 2k\pi \leq \pi$.

Una osservazione utile è la seguente: se Θ è un argomento di $\dot\gamma$, e $\gamma \in \mathcal{B}$, si ha

$$|\ddot\gamma^s|(\{s\}) < |\dot\Theta^s|(\{s\}) \qquad \forall\, s \in S_\Theta. \tag{2.2}$$

Questa diseguaglianza mostra che lavorare su curve non equivale a lavorare su funzioni angolo, dato che le energie concentrate su punti di discontinuità sono differenti. Questo discorso si collega a quanto detto nell'introduzione. Abbiamo scelto le funzioni angolo perchè ci sono sembrate più naturali in vista dei risultati che uno vuole ottenere (come la penalizzazione dei punti singolari del bordo di un insieme in termini del salto dell'angolo).

La seguente proposizione mostra il legame tra le convergenze delle curve e quelle dei relativi angoli formati dai vettori tangenti. Infatti, supponiamo di avere un insieme E regolare tranne che in un punto di cuspide, e consideriamo la successione approssimante di insiemi che coincide con E tranne che in un intorno del punto di cuspide, dove è costruita con archetti di cerchio sempre più piccoli che si stringono intorno alla cuspide (si confronti con (3.6)). Se si considerano i relativi angoli formati dai vettori tangenti alle curve, ci possono essere scelte dei rappresentanti nelle classi di equivalenza per cui gli angoli delle curve approssimanti non convergono all'angolo originale. Tuttavia si può dimostrare il fatto seguente.

PROPOSIZIONE 2.1. *Sia $\gamma \in \mathcal{B}$, sia $\{\gamma_h\}_h \subseteq \mathcal{B}$ una successione di curve tale che $\dot\gamma_h \to \dot\gamma$ in $L^1([0,1];\mathbf{R}^2)$ per $h \to +\infty$. Supponiamo che γ e ciascuna curva γ_h siano parametrizzate*

con velocità costante su $[0,1]$. *Siano* $\theta, \theta_h \in BV([0,1])$ *argomenti di* $\dot\gamma, \dot\gamma_h$ *rispettivamente, per ogni* $h \in \mathbf{N}$. *Allora* $[\theta_h] \to [\theta]$ *per* $h \to +\infty$.

2.5. *Il funzionale rilassato.* Dato un funzionale $\mathcal{L}$ a valori reali estesi e definito sulla classe degli insiemi misurabili di $\mathbf{R}^2$, indichiamo con $\overline{\mathcal{L}}$ l'inviluppo semicontinuo (o funzionale rilassato) di $\mathcal{L}$ rispetto alla topologia di $L^1(\mathbf{R}^2)$ (si veda [8]).

3. I funzionali che descrivono il modello. Sia $g \in L^\infty(\mathbf{R}^2)$ una funzione assegnata a supporto compatto. Tale funzione rappresenta l'intensità di luce prodotta da una fotografia. Lo scopo è quello di riscostruire g, o, come si usa dire, segmentare l'immagine g. Questo significa trovare regioni di particolare interesse dell'immagine stessa, che possano servire per darne una descrizione approssimata. In questo modello tali regioni interessanti possono sovrapporsi e avere zone di occlusione e, teoricamente, le parti nascoste possono essere in qualche modo riscostruite.

Vogliamo dunque riprodurre g considerando un punto di minimo del funzionale $\mathcal{P}$ definito come

$$\mathcal{P}(E_1,\ldots,E_n) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial E_i} [1+\psi(\theta_i,\kappa_i)]\ d\mathcal{H}^1 + \sum_{i=1}^{n} |E_i| + \sum_{i=1}^{n+1} \int_{E_i'} |g_i - g|^2\ dz. \tag{3.1}$$

In questa formula $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, $E_1,\ldots,E_n \in \mathcal{C}_b^2(\mathbf{R}^2)$, $\theta_i(z)$ è l'angolo che il versore tangente a ∂E_i nel punto $z \in \partial E_i$ forma con la direzione positiva dell'asse delle x, $\kappa_i(z)$ è la curvatura di ∂E_i in z, e

$$\begin{aligned} &E_1' = E_1, \qquad E_i' = E_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} E_j \quad \forall\, i=2,\ldots,n, \qquad E_{n+1}' = \mathbf{R}^2 \setminus \bigcup_{j=1}^{n} E_j, \\ &g_i = \frac{1}{|E_i'|}\int_{E_i'} g\ dz \qquad \forall\, i=1,\ldots,n, \qquad g_{n+1} = 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Infine $\psi : \mathbf{R}\times\mathbf{R} \to [0,+\infty]$ è una funzione di Borel che soddisfa le seguenti ipotesi:

(i) $\psi(\eta,\cdot)$ è convessa su $\mathbf{R}$ per ogni $\eta \in \mathbf{R}$;

(ii) ψ è inferiormente semicontinua su $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$;

(iii) $\psi(\cdot,0)$ è limitata;

(iv) esistono due costanti positive $A > 0$ e $B \geq 0$ tali che

$$\psi(\eta,\xi) \geq A|\xi| - B \qquad \forall\,(\eta,\xi) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}; \tag{3.3}$$

(v) $\psi(\eta,\xi) = \psi(\eta+\pi,\xi)$ per ogni $(\eta,\xi) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}$;

(vi) $\psi(\eta,\xi) = \psi(\eta,-\xi)$ per ogni $(\eta,\xi) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}$.

Le ultime due assunzioni su ψ servono per semplificare la trattazione, ma alcuni risultati resterebbero validi anche senza di esse. Come caso modello per ψ si può considerare la funzione ψ definita come

$$\psi(\eta,\xi) = \psi(|\xi|) = \begin{cases} c_1\xi^2 & \text{se } |\xi| < T, \\ c_2|\xi| - c_3 & \text{se } |\xi| \geq T, \end{cases} \tag{3.4}$$

con $T > 0$, $c_1 > 0$, $c_1T^2 = c_2T - c_3$, $c_2 = 2c_1T$; questa è la funzione adoperata da Mumford e Nitzberg per la descrizione del modello.

Quello che si deve pensare è che ogni partizione $\{E_1, \ldots, E_n\}$ è munita dell'ordinamento seguente: $E_i > E_j$ (i.e., E_i è più vicino di E_j all'osservatore) se $i < j$. Questo ordinamento rappresenta la profondità relativa (o l'occlusione); dunque, se $i = 1, \ldots, n$, l'insieme E_i' definito in (3.2) è la parte visible di E_i, e E_{n+1}' è lo sfondo.

Il termine in $\mathcal{P}$ contenente la funzione g serve per mantenere g pressochè costante su ogni regione. Il termine di area penalizza l'area totale delle regioni, e incoraggia segmentazioni in cui piccole regioni occludono regioni più grandi. Infine, il termine di lunghezza e curvatura richiede che le frontiere delle regioni abbiano lunghezza non troppo grande e non siano troppo curvate.

Poichè siamo interessati alla semicontinuità di $\mathcal{P}$ rispetto alla convergenza L^1 di insiemi, possiamo semplificare il funzionale trascurando subito due termini (continui rispetto alla topologia L^1), quello dipendente dalla g e quello dipendente dall'area. Inoltre non è difficile vedere che tutto si riduce a considerare il funzionale semplificato

$$F(E) = \int_{\partial E} [1 + \psi(\theta, \kappa)] \; d\mathcal{H}^1.$$

Nel seguito dunque ci concentreremo sul funzionale F. Pertanto precisiamolo meglio. Sia $E \in \mathcal{C}_b^2(\mathbf{R}^2)$, e sia $\Gamma = \{\gamma^1, \ldots, \gamma^m\}$ una parametrizzazione orientata di ∂E. Sia $\theta(z)$ l'angolo che il versore tangente a ∂E in $z \in \partial E$ forma con la direzione positiva dell'asse delle x. e sia $\kappa(z)$ la curvatura di ∂E in z. Definiamo

$$F(E) = \begin{cases} \mathcal{H}^1(\partial E) + \displaystyle\int_{\partial E} \psi(\theta,\kappa) \; d\mathcal{H}^1 & \text{se } E \in \mathcal{C}_b^2(\mathbf{R}^2), \\ +\infty & \text{altrove sugli insiemi misurabili.} \end{cases} \tag{3.5}$$

Poniamo $F(\emptyset) = 0$.

Semplici esempi mostrano che esistono insiemi non regolari E tali che $\overline{F}(E) < +\infty$, come i poligoni e gli insiemi con cuspidi. È facile rendersi conto che, se uno ha un insieme regolare tranne che in un punto p di angolo, si può trovare una successione di insiemi regolari che approssima E in area e al limite fornisce una energia finita. Infatti, prendiamo ψ come in (3.4), e indichiamo con α l'angolo (interno) formato nel punto p dalla frontiera

di E. Basta allora considerare la successione formata da insiemi che sono uguali ad E dappertutto tranne che in un intorno di p, e ivi hanno un archetto di circonferenza che smussa il punto in questione, e ivi si stringe. Questo fornisce immediatamente la stima su $\overline{F}(E)$ seguente:

$$\overline{F}(E) \leq \mathcal{H}^1(\partial E) + \int_{\partial E \setminus \{p\}} \psi(|\kappa|)\, d\mathcal{H}^1 + c_2(\pi - \alpha). \tag{3.6}$$

Osserviamo che il punto singolare p è dunque penalizzato, in termini dell'energia, di un fattore proporzionale a $\pi - \alpha$. Tale penalizzazione corrisponde alla variazione dell'angolo del versore tangente alle curve approssimanti, in un intorno di p.

Le domanda naturali sono allora le seguenti: come definire un funzionale su insiemi non regolari, e come rappresentarlo usando le parametrizzazioni dei bordi? L'estensione, come comunemente si fa in Calcolo delle Variazioni, si fa usando $\overline{F}$. La scrittura di tale funzionale come funzione di insieme risulta invece un problema, a nostra conoscenza, ancora aperto.

Introduciamo per cominciare i funzionali su funzioni angolo e su curve aventi discontinuità. Indichiamo con ψ_∞ la funzione di recessione di ψ rispetto alla variabile ξ, i.e.,

$$\psi_\infty(\eta, \xi) = \lim_{t \to 0+} t\psi(\eta, \xi/t) \qquad \forall\, (\eta, \xi) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}.$$

Sia $\theta \in BV(]a,b[\,; \mathbf{R}/2\pi)$, $\underline{\theta} \in [\theta]$ e $\Theta \in \mathcal{M}[\theta]$; per ogni intervallo aperto $I \subseteq\,]a,b[$ definiamo

$$K(\theta, I) = K^a(\theta, I) + K^s(\theta, I), \tag{3.7}$$

dove

$$K^a(\theta, I) = \int_I \psi(\underline{\theta}, \dot{\underline{\theta}}^a)\, dt,$$

e

$$K^s(\theta, I) = \int_{I \setminus S_\Theta} \psi_\infty(\Theta, 1)\, d|\dot{\Theta}^s| + \sum_{s \in I \cap S_\Theta} \int_{\Theta(s-)}^{\Theta(s+)} \psi_\infty(\tau, 1)\, d\tau. \tag{3.8}$$

Nella espressione di K^s abbiamo $\Theta(s-) < \Theta(s+)$, dato che $\Theta(s\pm)$ sono i limiti inferiore e superiore approssimati di Θ nel punto s. Si può mostrare che $K^a(\theta, I)$ non dipende dalla scelta di $\underline{\theta} \in [\theta]$, e che $K^s(\theta, I)$ non dipende dalla scelta di $\Theta \in \mathcal{M}[\theta]$.

Se Θ è un argomento di $\dot{\gamma}$ per una opportuna curva $\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^2$ di classe $\mathcal{B}$ parametrizzata con velocità costante, poniamo

$$K^s(\Theta, [a,b]) = K^s(\Theta,]a,b[) + \left| \int_{\Theta(b-)}^{\Theta(a+)-2k\pi} \psi_\infty(\tau, 1)\, d\tau \right|,$$

dove $k \in \mathbf{Z}$ è tale che $-\pi < \Theta(a+) - \Theta(b-) - 2k\pi \leq \pi$.

Si può dimostrare che il funzionale appena definito risulta semicontinuo rispetto alla convergenza L^1 (delle classi di equivalenza).

Definiamo adesso il funzionale sulle curve. Sia $\Gamma = \{\gamma^1, \ldots, \gamma^m\}$ un sistema di curve di classe $\mathcal{B}$ parametrizzato per lunghezza d'arco, sia Θ_i un argomento di $\dot{\gamma}^i$ su $[0, l(\gamma^i)]$ per ogni $i = 1, \ldots, m$. Definiamo

$$K(\Gamma) = K^a(\Gamma) + K^s(\Gamma), \qquad F(\Gamma) = l(\Gamma) + K(\Gamma),$$

dove

$$K^a(\Gamma) = \sum_{i=1}^{m} K^a(\Theta_i, [0, l(\gamma^i)]), \qquad K^s(\Gamma) = \sum_{i=1}^{m} K^s(\Theta_i, [0, l(\gamma^i)]).$$

4. Semicontinuità di F. Vale il seguente teorema, di cui vogliamo commentare la dimostrazione.

TEOREMA 4.1. *Sia $E \in \mathcal{C}_b^2(\mathbf{R}^2)$, e sia $\{E_h\}_h \subseteq \mathcal{C}_b^2(\mathbf{R}^2)$ una successione convergente ad E in $L^1(\mathbf{R}^2)$. Allora*

$$F(E) \leq \liminf_{h \to +\infty} F(E_h). \tag{4.1}$$

TRACCIA DELLA DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre che il membro destro di (4.1) sia finito, altrimenti non c'è niente da dimostrare. Sia $\{E_{h_k}\}_k$ una sottosuccessione $\{E_h\}_h$ tale che

$$\lim_{k \to +\infty} F(E_{h_k}) = \liminf_{h \to +\infty} F(E_h) < +\infty.$$

Per semplicità, questa successione (e ogni ulteriore sua sottosuccessione) verrà denotata con $\{E_k\}_k$. Grazie al fatto che le energie degli insiemi approssimanti sono equilimitate rispetto a h, si può mostrare che, per ogni k, ∂E_k ha un numero finito di componenti connesse. Sia Δ_k una parametrizzazione orientata di ∂E_k. Sempre per motivi di equilimitatezza delle energie, possiamo supporre, passando a eventuali sottosuccessioni, che $\Delta_k = \{\gamma_k^1, \ldots, \gamma_k^m\}$ con m indipendente da k. A questo punto si riesce a dimostrare, con argomenti di compattezza, che esiste una successione $\{\Gamma_k\}_k = \{\gamma_k^{i_1}, \ldots, \gamma_k^{i_n}\}$ (il cui elemento k-esimo è un sistema di curve ottenuto da $\{\gamma_k^1, \ldots, \gamma_k^m\}$ eventualmente trascurando quelle curve con lunghezza infinitesima, o che hanno traccia che si allontana all'infinito rispetto all'origine di $\mathbf{R}^2$), ed esiste un sistema limite di curve $\Gamma \in \mathcal{B}$, che verificano le seguenti proprietà: $n \leq m$, $\Gamma = \{\gamma^{i_1}, \ldots, \gamma^{i_n}\}$, e, per ogni $j = 1, \ldots, n$ si ha ${\gamma_k}^{i_j} \to \gamma^{i_j}$ uniformemente e $\dot{\gamma}_k^{i_j} \rightharpoonup \dot{\gamma}^{i_j}$ debolmente in BV per $k \to +\infty$. Denotiamo con $\Theta_k^{i_j}$ (rispettivamente Θ_{i_j}) un argomento di $\dot{\gamma}_k^{i_j}$ (rispettivamente di $\dot{\gamma}^{i_j}$). Dalla Proposizione 2.1 segue

che $\Theta_k^{i_j} \to \Theta_{i_j}$ in L^1 per $k \to +\infty$. Abbiamo dunque

$$\begin{aligned}
\liminf_{h\to+\infty} F(E_h) &= \lim_{k\to+\infty} F(E_k) \geq \lim_{k\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} l(\gamma_k^{i_j}) \\
&+ \liminf_{k\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} \int_0^{l(\gamma_k^{i_j})} \psi(\Theta_k^{i_j}, \dot\Theta_k^{i_j})\, ds = \sum_{j=1}^{n} l(\gamma^{i_j}) \\
&+ \liminf_{k\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} l(\gamma_k^{i_j}) \int_0^1 \psi(\Theta_k^{i_j}, l(\gamma_k^{i_j})^{-1}\dot\Theta_k^{i_j})\, dt \\
&\geq l(\Gamma) + \sum_{j=1}^{n} l(\gamma^{i_j}) \liminf_{k\to+\infty} \int_0^1 \psi(\Theta_k^{i_j}, l(\gamma_k^{i_j})^{-1}\dot\Theta_k^{i_j})\, dt.
\end{aligned}$$

Ma i funzionali sugli angoli si dimostrano essere semicontinui. Ne deduciamo che

$$\liminf_{h\to+\infty} F(E_h) \geq l(\Gamma) + \sum_{j=1}^{n} K(\Theta_{i_j}, [0, l(\gamma^{i_j})]) = l(\Gamma) + K(\Gamma) = F(\Gamma).$$

Adesso si riesce a vedere che vale sempre l'inclusione $(\Gamma) \supseteq \partial E$. Inoltre, vale anche un lemma che permette di paragonare le energie di Γ e E quando $(\Gamma) \supseteq \partial E$. Precisamente, si dimostra la cosa che segue: *sia $E \in C_b^2(\mathbf{R}^2)$, sia $\Gamma \in \mathcal{B}$ un sistema di curve tale che $(\Gamma) \supseteq \partial E$. Allora*

$$\int_{\partial E} \psi(\theta, \kappa)\, d\mathcal{H}^1 \leq K^a(\Gamma).$$

Ne deduciamo $F(\Gamma) \geq F(E)$, e la dimostrazione è conclusa. □

5. Qualche esempio di calcolo di $\overline{F}(E)$. In questa sezione la funzione $\psi = \psi(|\xi|)$ è quella in (3.4). Si può dimostrare il seguente teorema, che chiarisce la diseguaglianza (3.6).

TEOREMA 5.1. *Sia E un insieme regolare tranne che in un punto p, dove ∂E ha un angolo (interno) α, con $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Allora*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}^1(\partial E) + \int_{\partial E\setminus\{p\}} \psi(|\kappa|)\, d\mathcal{H}^1 + c_2 \min(\alpha, 2\pi - \alpha, |\pi - \alpha|) \\
&\leq \overline{F}(E) \leq \mathcal{H}^1(\partial E) + \int_{\partial E\setminus\{p\}} \psi(|\kappa|)\, d\mathcal{H}^1 + c_2|\pi - \alpha|.
\end{aligned}$$

TRACCIA DELLA DIMOSTRAZIONE. Con un ragionamento come quello fatto in (3.6), ci possiamo ridurre a dimostrare che

$$\overline{F}(E) \geq \mathcal{H}^1(\partial E) + \int_{\partial E\setminus\{p\}} \psi(|\kappa|)\, d\mathcal{H}^1 + c_2 \min(\alpha, 2\pi - \alpha, |\pi - \alpha|).$$

Grazie ad opportuni risultati di compattezza, si dimostra che

$$\overline{F}(E) \geq \mathcal{H}^1(\partial E) + \int_{\partial E\setminus\{p\}} \psi(|\kappa|)\ d\mathcal{H}^1 + F(\Gamma, \{p\}),$$

dove $\Gamma = \{\gamma^1, \ldots, \gamma^m\}$ è un sistema limite di curve di classe $\mathcal{B}$ la cui traccia contiene ∂E, e tale che E coincide con l'insieme dei punti di indice 1 rispetto a Γ; inoltre, se Θ_i è un argomento di $\dot{\gamma}^i$ su $[0, l(\gamma^i)]$, abbiamo definito

$$F(\Gamma, \{p\}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{s\in\gamma^{i^{-1}}(p)} \int_{\Theta_i(s-)}^{\Theta_i(s+)} \psi_\infty(\tau, 1)\ d\tau = c_2 \sum_{i=1}^{m} \sum_{s\in\gamma^{i^{-1}}(p)} |\Theta_i(s+) - \Theta_i(s-)|.$$

Questa grandezza descrive l'energia concentrata del sistema Γ nel punto p. Si tratta dunque di dimostrare che

$$F(\Gamma, \{p\}) \geq c_2 \min(\alpha, 2\pi - \alpha, |\pi - \alpha|).$$

Questa diseguaglianza si dimostra in vari passi, usando le proprietà di parità dei vettori tangenti a Γ nel punto p [4]. Tutto è basato sul fatto che $E = \{z \in \mathbf{R}^2 : I(\Gamma, z) = 1\}$, che è a sua volta conseguenza del fatto che Γ è limite di *bordi* di insiemi. □

COROLLARIO 5.1. *Se alle ipotesi del Teorema 5.1 si aggiunge $\pi/2 \leq \alpha \leq 3\pi/2$, allora*

$$\overline{F}(E) = \mathcal{H}^1(\partial E) + \int_{\partial E\setminus\{p\}} \psi(|\kappa|)\ d\mathcal{H}^1 + c_2|\pi - \alpha|. \tag{5.1}$$

Noi pensiamo che quest'ultimo risultato valga senza restrizioni su α. Il motivo è che non ci sono altri punti di singolarità diversi da p in cui una linea nascosta uscente da p possa terminare.

Sottolineiamo che una eguaglianza tipo la (5.1) dove però siano presenti più punti di angolo α_i (ognuno che dia il suo contributo di energia concentrata) non vale in generale, se $\alpha_i < \pi/2$ o $\alpha_i > 3\pi/2$ per qualche i. Vale infatti il seguente teorema, che mostra che in certe condizioni l'energia minima possibile (i.e., il valore del funzionale rilassato) non è raggiunta smussando gli angoli con archi di cerchio, ma collegando due angoli tra loro con dei tubicini sempre più stretti (si confronti anche con [3]).

TEOREMA 5.2. *Supponiamo che E sia l'unione di due componenti connesse E_1 ed E_2, a forma di goccia, affacciate l'una all'altra, aventi ciascuna un solo punto singolare dato da uno stesso angolo interno $0 < \alpha < \pi/2$. Siano p_1 e p_2 i punti singolari di E_1 e E_2, rispettivamente, e supponiamo che tali punti siano allineati, e siano proprio i punti da cui le due gocce "si affacciano". Se la distanza D tra p_1 e p_2 è sufficientemente piccola, allora*

$$\begin{aligned}\overline{F}(E) &= \mathcal{H}^1(\partial E) + \int_{\partial E\setminus\{p_1,p_2\}} \psi(|\kappa|)\ d\mathcal{H}^1 + 2D + 2c_2\alpha \\ &< \mathcal{H}^1(\partial E) + \int_{\partial E\setminus\{p_1,p_2\}} \psi(|\kappa|)\ d\mathcal{H}^1 + 2c_2(\pi - \alpha).\end{aligned}$$

TRACCIA DELLA DIMOSTRAZIONE. Anche in questo caso, si riesce a dimostrare che

$$\overline{F}(E) \geq \mathcal{H}^1(\partial E) + \int_{\partial E \setminus \{p_1,p_2\}} \psi(|\kappa|)\, d\mathcal{H}^1$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} \int_{\{s\in[0,l(\gamma^i)]:\gamma^i(s)\notin \partial E\}} \left[1 + \psi(|\dot{\Theta}_i^a|)\right] ds + K^s(\Gamma),$$

dove Γ è un sistema di curve con proprietà simili a quelle elencate nella dimostrazione del Teorema 5.1. Resta da dimostrare che, se D è sufficientemente piccolo, allora

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{\{s\in[0,l(\gamma^i)]:\gamma^i(s)\notin \partial E\}} \left[1 + \psi(|\dot{\Theta}_i^a|)\right] ds + K^s(\Gamma) \geq 2D + 2c_2\alpha.$$

Anche in questo caso bisogna usare argomenti di parità sui vettori tangenti a Γ nei punti p_1 e p_2, un poco più complicati di quelli adoperati per dimostrare il Teorema 5.1. □

Concludiamo con un breve commento al modello esposto. Tale modello ha alcune limitazioni (si veda la discussione in [29, Ch. 6]): in particolare, notiamo che viene imposto sostanzialmente un solo valore di intensità di g in ogni regione che forma la segmentazione. Tale limitazione può essere superata considerando, al posto del termine i-esimo in cui compare g nella scrittura di $\mathcal{P}$, un termine tipo

$$\int_{E_i'} (g - u_i)^2\, dx + \int_{E_i} |\nabla u_i|^2\, dx,$$

dove la funzione u_i approssima l'intensità di luce osservata nella regione E_i ed è ivi regolare. Naturalmente con questa differenza lo studio del modello diventa più complicato.

REFERENCES

[1] L. AMBROSIO AND V.M. TORTORELLI, *Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via Γ-convergence*, Comm. Pure Appl. Math., XLIII (1990), pp. 999-1036.

[2] G. BELLETTINI, *Semicontinuità di un funzionale dipendente da una funzione convessa della curvatura*, Seminario di Analisi Matematica Univ. Bologna, Tecnoprint Bologna (1991-92), pp. 59–75.

[3] G. BELLETTINI, G. DAL MASO, AND M. PAOLINI, *Semicontinuity and relaxation properties of a curvature depending functional in 2D*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, XX, 2 (1993), pp. 247–299.

[4] G. BELLETTINI AND M. PAOLINI, *Variational properties of an image segmentation functional depending on contours curvature*, Advances in Math. Sc. and Appl. (to appear).

[5] G. BELLETTINI, M. PAOLINI, AND C. VERDI, *Numerical minimization of geometrical type problems related to calculus of variations*, Calcolo, 27 (1991), pp. 251–278.

[6] M. BERGER AND B. GOSTIAUX, *Differential Geometry: Manifolds, Curves and Surfaces*, Springer-Verlag, New York, 1988.

[7] A. BLAKE AND A. ZISSERMAN, *Visual Reconstruction*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1985.

[8] G. BUTTAZZO, *Semicontinuity, Relaxation and Integral Representation in the Calculus of Variations*, Longman, Harlow, 1989.

[9] L. CESARI, *Surface Area*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1956.

[10] F. COLOMBINI, E. DE GIORGI, AND L.C. PICCININI, *Frontiere Orientate di Misura Minima e Questioni Collegate*, Quaderni della Classe di Scienze della Scuola Normale Superiore di Pisa, Pisa, 1972.

[11] A. COSCIA, *Existence result for a new variational problem in one-dimensional segmentation theory*, Ann. Univ. Ferrara, XXXVII (1991), pp. 185–203.

[12] G. DAL MASO, *Integral representation on $BV(\Omega)$ of Γ-limits of variational integrals*, Manuscripta Math., 30 (1980), pp. 387–416.

[13] G. DAL MASO, J.M. MOREL, AND S. SOLIMINI, *A variational method in image segmentation: existence and approximation results*, Acta Math., 168 (1992), pp. 89–151.

[14] E. DE GIORGI, *Free discontinuity problems in calculus of variations*, in Frontìeres in Pure and Applied Mathematics (R. Dautray ed.), North-Holland, Amsterdam, 1991, pp. 55–62.

[15] M.P. DO CARMO, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.

[16] H. FEDERER, *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1968.

[17] D. GEMAN AND S. GEMAN, *Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the bayesian restoration of images*, IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., 6 (1984), pp. 721–741.

[18] M. GIAQUINTA, G. MODICA, AND J. SOUCEK, *Variational problems for maps of bounded variation with values in S^1*, Preprint.

[19] E. GIUSTI, *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*, Birkhäuser, Boston, 1984.

[20] A. LINNÉR, *Some properties of the curve straightening flow in the plane*, Trans. Amer. Math. Soc., 314 (1989), pp. 605–617.

[21] A. LINNÉR, *Curve-straightening*, Proc. of Symp. in Pure Math., 54 (1993), pp. 451–458.

[22] R. MARCH, *Visual reconstruction with discontinuities using variational methods*, Image and Vision Computing, 10 (1992), pp. 30–38.

[23] U. MASSARI AND M. MIRANDA, *Minimal Surfaces of Codimension One*, North-Holland, New York, 1984.

[24] J. MOREL AND S. SOLIMINI, *Segmentation of images by variational methods: a constructive approach*, Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid, 1 (1988), pp. 169–182.

[25] D. MUMFORD, *Elastica and Computer Vision*, in Algebraic Geometry and Applications, C. Bajaj, ed., Heidelberg, Springer-Verlag, 1992.

[26] D. MUMFORD AND M. NITZBERG, *The 2.1-D sketch*, in Proceedings of the Third International Conference on Computer vision, Osaka, 1990.

[27] D. MUMFORD AND J. SHAH, *Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems*, Comm. Pure Appl. Math., 42 (1989), pp. 577–685.

[28] D. MUMFORD AND J. SHAH, *Boundary detection by minimizing functionals*, I. Proc. IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition (1985), San Francisco, CA.

[29] M. Nitzberg, D. Mumford, and T. Shiota, *Filtering, Segmentation and Depth*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[30] J. Shah, *Segmentation by nonlinear diffusion*, IEEE Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition (1991).

[31] J. Shah, *Segmentation by nonlinear diffusion, II*, Proc. of the IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition (1992), pp. 644–647.

[32] J. Shah, *Properties of energy-minimizing segmentations*, SIAM J. Control and Optimization, 30 (1992), pp. 99-111.

[33] A.I. Vol'pert, *The space BV and quasilinear equations*, Math. USSR Sbornik, 2 (1967), pp. 225–267.